

Competencias matemáticas: Una línea de investigación

Horacio Solar Bezmalinovic hsolar@ucsc.cl
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile.

Resumen: A partir de varias investigaciones que se han desarrollado en los últimos años, se presenta la línea de investigación “competencias matemáticas”. Se ha elaborado un Modelo de Competencia Matemática (MCM) que ha permitido estudiar problemáticas en torno al currículo de matemáticas y que se ha utilizado en la formación de profesores. A futuro se espera utilizarlo para estudiar el aprendizaje de los estudiantes. A continuación se presenta un recorrido de estas investigaciones.

Palabras clave: competencias matemáticas, modelo de competencia matemática, modelización, argumentación.

1. Introducción

En el estudio de las competencias matemáticas, destacan algunos proyectos en torno a la implementación del enfoque por competencia en matemática: (a) la reforma curricular portuguesa que propone una caracterización de las competencias matemáticas (Abrantes, 2001); (b) la incorporación de competencias matemáticas al currículum danés (Niss, 2002); (c) el proyecto PISA que se apropia de las competencias propuestas por Niss para sustentar su marco teórico (OCDE, 2003), y (d) los estándares de matemáticas en Colombia (Ministerio de Educación Nacional, 2006). En estas experiencias señaladas, el listado de competencias matemáticas corresponde a procesos matemáticos tales como razonar, argumentar, representar, calcular, modelar, resolver problemas y comunicar.

La caracterización de las competencias matemáticas por medio de procesos matemáticos, es una de las contribuciones del enfoque por competencias al currículo de matemáticas, dotándolo de una estructura orientada al desarrollo de dichos procesos (Solar, 2009). Además, las competencias matemáticas al sustentarse en procesos, se caracterizan por ser transversales a los núcleos temáticos y desarrollarse a largo plazo de manera cíclica en cada nivel educativo.

El interés por desarrollar procesos en la enseñanza de las matemáticas no es nuevo. En efecto, se puede hacer una extensa lista de procesos definidos como propios de las matemáticas (representar, argumentar, demostrar, clasificar, analizar, resolver, conjeturar, razonar, visualizar, calcular, etc.). Aunque los procesos han estado presentes en los currículos de matemáticas, no han tenido un papel destacado en comparación con los contenidos. Hay otras propuestas

curriculares que destacan los procesos sin mencionar las competencias (Ministry of Education, 2005; NCTM; 2003). Pese a estas propuestas, hay una carencia de proyectos curriculares que describan qué tipo de relaciones hay entre los contenidos y los procesos y que planteen, por ejemplo, a partir de un contenido matemático qué procesos se desarrollan.

La ausencia de una articulación entre procesos y contenidos se entiende a partir de la falta de investigaciones que estudien el desarrollo de competencias matemáticas asociado a la noción de proceso. Al realizar una revisión a las revistas de educación matemática, las publicaciones que tratan el tema de competencia matemática como proceso, generalmente se sustentan en las ocho competencias propuestas por Niss (2002). Además, no solo el marco teórico se queda en un nivel básico e inicial, sino que se evidencia la ausencia de una línea de investigación que promueva estudios en torno a las competencias matemáticas. Esta realidad se contrasta notoriamente con la gran cantidad de libros sobre competencias matemáticas que se puede encontrar en el mercado, que responde a las necesidades del profesor de matemática, que se encuentran de un momento al otro con una reforma curricular basada en competencias, y se siente con pocas herramientas para responder a los desafíos del nuevo currículo. No obstante lo anterior, en este último tiempo han emergido algunas investigaciones en competencias matemáticas sustentadas en un mismo modelo de competencia y dirigidas a diversas problemáticas de investigación. El propósito de este taller es presentar una línea de investigación en competencias matemáticas consistente y coherente, que se ha ido desarrollando en base investigaciones recientes, otras en curso y las que a futuro se esperan desarrollar. (Solar, Rojas y Ortiz, 2011). Esta línea de investigación, se inicia con la concreción de un Modelo de Competencia Matemática (MCM).

2. Modelo de competencia matemática (MCM)

Al iniciar la construcción de este modelo, y por tanto el estudio en competencias matemáticas, se realizó una revisión en profundidad sobre la literatura que había al respecto. La primera conclusión que se obtuvo fue que no hay un consenso en la noción de competencia matemática, ni hay una estructura concreta que permita explicar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basándose en un enfoque por competencias. A partir de aquí, nuestro primer propósito fue llegar a

un acuerdo sobre el aspecto relevante y diferenciador de las competencias: organizar la matemática escolar no solo por contenidos tales como álgebra, geometría, aritmética, sino que también destacar los procesos matemáticos: modelizar, resolver problemas, argumentar, razonar, comunicar.

Para ello, el modelo debía articular los contenidos con los procesos. En primer lugar, los contenidos matemáticos se estructuran en términos de organizaciones matemáticas, basándonos en la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), ya que es un marco teórico que permite caracterizar detalladamente las estructuras matemáticas, para articularlas con las competencias matemáticas. Por otra parte, el progreso de la competencia se caracterizó en términos de niveles de complejidad de la actividad. A medida que transcurre el período escolar el trabajo con competencias matemáticas debería progresar, pero a la hora de estudiar este progreso surgen las siguientes preguntas: ¿de qué manera se progresa? ¿Cuáles son las variables a considerar para estudiar el progreso en los estudiantes? Se parte de la base que por medio de las actividades matemáticas se puede estudiar el desarrollo de las competencias; este mismo principio se aplicó al progreso de una competencia, con el propósito de poder identificar el avance según el tipo de actividades que son capaces de resolver los estudiantes. Para caracterizar este progreso, se utiliza la pirámide propuesta por de Lange (1995) y los grupos de competencia formulados en PISA (OCDE, 2003): reproducción, conexión y reflexión. Siguiendo a Rico (2007) se ha preferido denominar niveles de complejidad a los grupos de competencia para evitar confusiones con el significado de competencia y porque el término “nivel de complejidad” destaca más su significado.

Finalmente, el Modelo de Competencia Matemática (MCM) se sustenta en la perspectiva funcional de las matemáticas: “mathematical literacy”¹ (OECD, 2003).

El modelo se conforma por cuatro componentes:

Competencia matemática: en base a los estándares de procesos del NCTM (2003) y las competencias matemáticas propuestas por Abrantes (2001), Niss (2002) y Pisa (OCDE, 2003), acordamos elegir y optar por procesos matemáticos nucleares que denominamos competencias matemáticas.

¹ *Mathematical literacy* se ha traducido al castellano en el informe PISA (OCDE, 2003) como “Competencia Matemática”. Pero para evitar confusiones con nuestro significado de competencia matemática, preferimos mantener el término en su versión original.

Procesos matemáticos: el significado de proceso se ha acuñado de la propuesta curricular del NCTM (2003). Cada competencia matemática se compone de procesos matemáticos, y están presentes de forma transversal a los contenidos matemáticos y se desarrollan a largo plazo.

Organizaciones matemáticas: los contenidos matemáticos se han estructurado en términos de organizaciones matemáticas, las cuales contemplan tareas y técnicas matemáticas, variables didácticas y condiciones de realización de dichas tareas, aspectos que están sustentados en la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999).

Niveles de complejidad: el progreso de la competencia se determina en términos del nivel de complejidad de la actividad, término que se adopta de los grupos de competencia de PISA (OCDE, 2003) basados en los trabajos desarrollados por de Lange (1995). En nuestro modelo de competencia, se denominan de la misma manera que los niveles de complejidad citados en PISA (reproducción, conexión, reflexión), pero se determinan de una forma distinta, dado que en nuestro modelo la complejidad está en función de las tareas y los procesos que conforman la competencia.

3. Problemas de investigación

Para organizar las diferentes investigaciones que se han realizado en la línea de competencias matemática, se ha optado por utilizar el sistema didáctico (Chevallard & Joshua 1982, D'Amore & Fandiño, 2002), en que sus tres vértices -saber, maestro y alumno- permite organizar en tres polos esta línea de investigación: currículo, formación de profesores, y aprendizaje.

El MCM se ha utilizado para estudiar diferentes problemáticas, con distintos niveles de intensidad, en cada uno de los ámbitos señalados anteriormente. A continuación, se ahondará en cómo se articula y operacionaliza el MCM en cada ámbito, y qué información relevante es capaz de aportar.

Competencias en el currículo. Para interpretar el currículum en términos de las competencias y procesos matemáticos, en Espinoza, Barbe, Mitrovich, Solar, Rojas & Matus (2008) se caracterizó el marco curricular chileno y los programas de estudio de primer ciclo básico correspondiente al subsector de matemáticas en función del Modelo de Competencia Matemática (MCM). Dicho estudio se centró

en primer y segundo año de educación primaria (6-8 años) en los ejes de números, operaciones, y resolución de problemas en cuanto a número y operaciones se refiere. Se lograron identificar cuatro competencias matemáticas en el currículum de estos niveles, compuestas cada una por un conjunto de procesos matemáticos: resolución de problemas, representación, razonamiento y argumentación, cálculo y manipulación de expresiones; identificándose, a su vez, las tareas matemáticas asociadas. Con este trabajo de caracterización se elaboró el instrumento “Matriz de Competencia”, que relaciona cada tarea con la competencia específica que desarrolla. Por medio del estudio de las variables didácticas involucradas, se determina el nivel de complejidad cognitiva (reproducción, conexión, reflexión) según la condiciones de realización de la tarea matemática implicada. La Figura 1 muestra un esquema de cómo se estructura dicho instrumento:

Curso y Semestre		Condiciones Didácticas	Condiciones Didácticas
APRENDIZAJE ESPERADO	TAREA MATEMÁTICA		
COMPETENCIAS	Resolución de Problemas		
	Representación		
	Razonamiento y argumentación		
	Cálculo y Manipulación de expresiones		

El color indica la competencia predominante, en este caso la cuarta de la matriz.

Procesos asociados a la competencia

Cruce de las competencias con los procesos y niveles de complejidad

Figura 1. Matriz de Competencias

Cabe señalar que para identificar cuál es la competencia que predominantemente moviliza una tarea matemática concreta, se ha marcado la celda de la condición didáctica del color de la competencia matemática predominante. En el ejemplo de la Figura 1, la competencia predominante es cálculo y manipulación de expresiones matemáticas ya que las condiciones de realización aparecen marcadas con el color de dicha competencia. Asimismo, en este ejemplo aparecen otros procesos movilizados –señalados con uno o varios asteriscos – que no son constitutivos de la competencia predominante. Los niveles de complejidad cognitiva descritos como reproducción, conexión y reflexión se identifican en las celdas de cruce a partir de la siguiente nomenclatura:

Representación (★), Conexión (★★), Reflexión (★★★).

En la web <http://www.grupoklein.cl/fonide/web/> se presenta las características de cada componente del modelo de competencia y las matrices de competencia para cada tarea matemática considerada. Este análisis se realizó por cada curso, semestre y eje de contenido de primer y segundo año de primaria.

En el taller se realizará una actividad que tendrá como propósito estudiar una de las matrices descritas, se realizará el ejercicio de identificar el nivel de complejidad en la matriz para luego contrastar con la construida en la investigación.

Si bien el estudio de Espinoza et al. (2008) significó el primer estudio del marco curricular chileno en el subsector de matemáticas desde un enfoque por competencias, se han realizado otras investigaciones que han caracterizado las competencias matemáticas que se ponen en juego en el estudio de un tema matemático específico en el aula de matemáticas. En Solar (2009) el modelo se puso a prueba en un estudio de caso al implementar una unidad didáctica para 8º básico de interpretación de gráficas para introducir el concepto de función. En este escenario se caracterizaron las competencias de modelización y argumentación, presentadas en la figura 2. Las caracterizaciones de estas dos competencias se han validado para el tema de interpretación de gráficas. En cursiva se presentan los procesos que conforman cada competencia.

La utilización del modelo se articula tanto en los niveles de planificación de la enseñanza, en particular de una unidad didáctica, como en su desarrollo en el aula. Sirve además para identificar las tareas matemáticas, los procesos asociados a una competencia y el nivel de complejidad en función de tareas y procesos. En la competencia de modelización, los ocho procesos en su conjunto se entienden como la construcción del modelo. Se define modelo como un conjunto de propiedades matemáticas ligadas a unas representaciones que permiten estudiar una situación y se destaca el hecho que los modelos no cambian, sino que son los significados sobre el modelo los que varían. En la competencia de argumentación, las acciones de interpretación, justificación, validación, entre otras, se han considerado como procesos, y al asociarlas con las tareas matemáticas, se puede identificar el nivel de complejidad de una actividad para estudiar el progreso de la competencia.

modelización en episodios de aula.

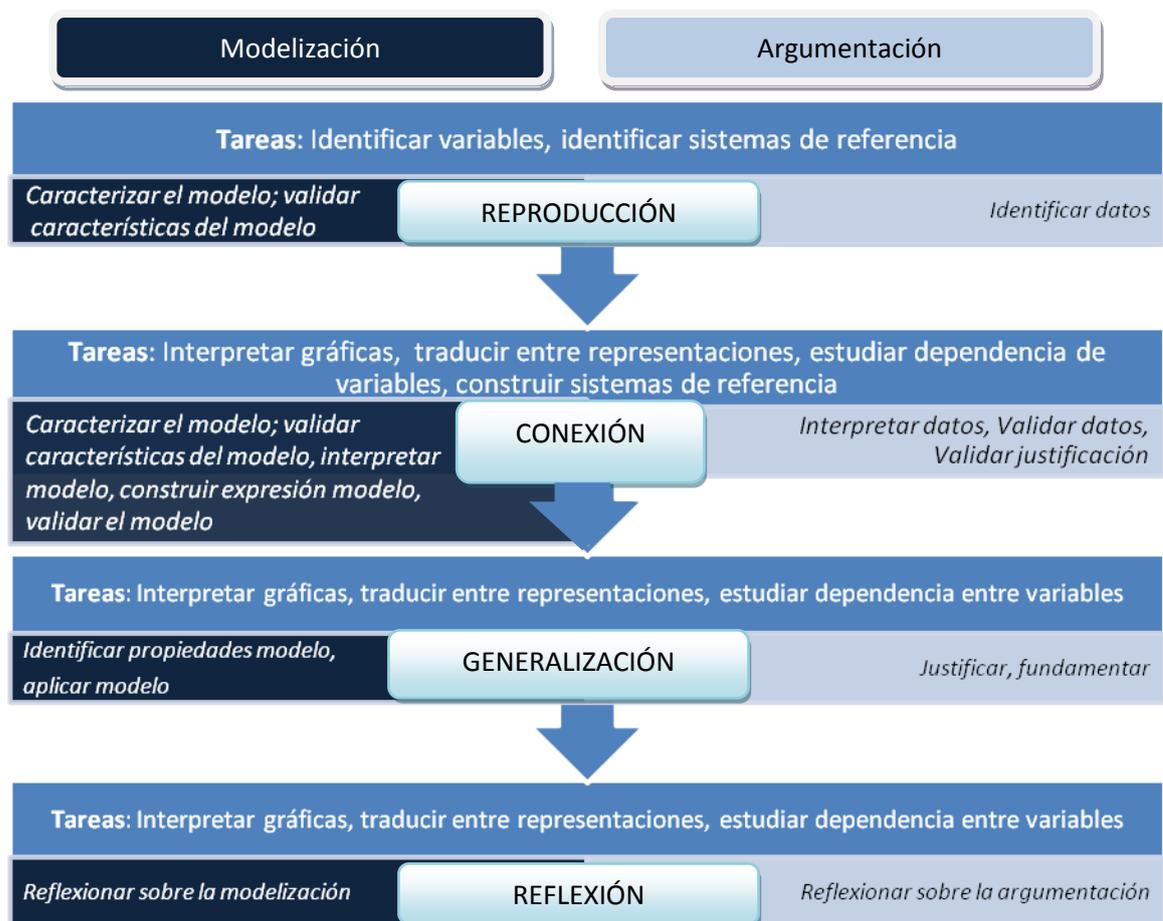


Figura 2. Competencias de modelización y argumentación

En el taller se realizará una actividad para identificar procesos de argumentación y

Competencias en la formación del profesorado. En base a las experiencias anteriores, se ha evidenciado la viabilidad del Modelo de Competencia Matemática (MCM), tanto en la interpretación del currículo como en su puesta en práctica en el aula de matemáticas. Al avanzar en la línea de investigación, también se ha estudiado cómo el profesor desarrolla un proceso de comprensión de las competencias matemáticas que ha de trabajar con sus estudiantes (Solar, Espinoza, Rojas, Ortiz, González, & Ulloa, 2011). En este sentido, se ha buscado desarrollar, implementar y evaluar una metodología de trabajo docente en torno al MCM que promueva la reflexión pedagógica necesaria para impactar en las prácticas de aula. Este aspecto se ha centrado principalmente en estudiar al profesor en torno a dos variables: el nivel de reflexión de los docentes y el nivel de desempeño.

La metodología de trabajo docente para estudiar el MCM ha materializado en un seminario, en cuyas sesiones han participado grupo de profesores que imparten

matemáticas en los primeros niveles de enseñanza básica

El trabajo con las docentes se desarrolló en dos grandes fases. La primera de ellas consistió en un seminario de ocho sesiones, que constó de dos partes. En las primeras cuatro sesiones se estudió el MCM a través de diferentes actividades de análisis (casos clínicos², planificación, secuencias de actividades, etc.); en las siguientes cuatro sesiones las profesoras trabajaron en el diseño y discusión de una secuencia didáctica en torno a los problemas aditivos y técnicas de cálculo propias de los niveles en que se desempeñaban (1º y 2º básico). En esta fase se vivió tanto la reflexión teórica-empírica del MCM, como la reflexión del diseño de la secuencia didáctica, que retomó y se fundamentó en la reflexión y aprendizajes producidos.

La segunda fase del trabajo con las docentes se basó en los procesos de implementación de la secuencia didáctica diseñada (basada en el MCM) y su reflexión, tanto antes como después de dicha implementación. En esta segunda instancia, se seleccionaron tres casos de estudio, es decir, a tres docentes se les realizó un acompañamiento exhaustivo en su implementación de las secuencias didácticas diseñadas, con tal de analizar en profundidad la práctica y averiguar cómo impactó en ella el trabajo en la metodología de trabajo docente mediado por el MCM como modelo didáctico.

En la conferencia de este congreso se muestran los resultados obtenidos en los cambios en la reflexión y desempeño de las profesoras. En el taller se realizará unas de las tareas didáctico matemáticas que se desarrollaron con las profesoras.

Competencias en el aprendizaje. Una vez concretado el MCM y una metodología de trabajo docente que permitía su apropiación por parte de los profesores, se ha proyectado la línea de investigación en el desarrollo de competencias en los estudiantes.

Para poder profundizar en el desarrollo de competencias matemáticas por parte de los estudiantes, hay que considerar la relación intrínseca que hay entre el desarrollo de procesos matemáticos y la construcción consecuente de conceptos. Por ello, es necesario centrar el trabajo en un nivel educativo, unos contenidos

² Los “casos clínicos” corresponden a episodios de clase en los cuales se mostraban tanto situaciones de enseñanza aprendizaje diseñadas expresamente para su análisis por parte de las profesoras del seminario, como segmentos de clase de las propias profesoras participantes.

matemáticos y en unas competencias matemáticas pertinentes a dicho contenido. El próximo proyecto se ha centrado en el desarrollo de las competencias de modelización y argumentación en el álgebra de los primeros niveles de la enseñanza básica.

El propósito del proyecto es caracterizar el desarrollo de las competencias de modelización y argumentación en el estudio del álgebra en estudiantes de los primeros cursos de enseñanza básica. Para lograr este propósito surgen interrogantes que apuntan a la manera que aprenden los estudiantes cuando sus profesores se sitúan en una metodología de trabajo docente sustentado en el MCM, y logran apropiarse de él. En particular la pregunta que guiaría la investigación es ¿Cuándo los profesores están en un entorno de metodología de trabajo docente sustentado en el MCM, de qué manera los estudiantes desarrollan las competencias de modelización y argumentación? Planteado de este modo, el interrogante permite visualizar la necesidad de promover que el profesor se apropie del MCM y logre concretar una propuesta didáctica para promover las competencias de argumentación y modelización en el estudio del álgebra, como prerrequisito para poder estudiar el impacto que ello produce en el aprendizaje de los estudiantes.

4. Conclusiones

Si bien el MCM ha servido en las experiencias descritas, también se ha visto que a medida que se han ampliado las problemáticas el modelo se ha adaptado. En el estudio de Espinoza et al. (2008) no se plantearon las competencias de comunicación y modelización, en cambio en investigaciones posteriores han sido consideradas como las principales competencias a promover en el profesorado.

Aunque la línea de competencias matemáticas se encuentra en proceso de consolidación, hecho que se respalda con que la noción de competencia matemática no está consensuada, se espera que con la presentación de esta línea de investigación sobre competencia matemática, otros investigadores se animen a estudiar problemáticas asociadas o bien estudiar procesos matemáticos específicos desde un enfoque por competencias.

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 125-143.

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard Y., & Joshua, M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(1), 159-239.
- D'Amore B., & Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*. México. 14(1), 48-61.
- De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. En T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 87–172). New York: SUNY Press.
- Espinoza, L; Barbé, Q.; Mitrovich, D.; Solar, H.; Rojas, D., & Matus, C. (2008). *Análisis de las competencias matemáticas en primer ciclo. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas. Proyecto FONIDE N°: DED0760*. Santiago: Mineduc.
- Mineduc. (2002). *Marco Curricular de la Educación Básica. Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica*. Chile: autor.
- National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM). (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. España: Thales.
- Niss, M. (2002) (coord). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project*. Roskilde: Roskilde University.
- OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Paris: autor.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), pp. 47-66.
- Solar, H. (2008). Competencias Matemáticas: ¿qué son y qué hay de nuevo?. *RECHIEM*, 4 (1), 75- 89.
- Solar, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso. Tesis doctoral*. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Solar, H, Espinoza, L, Rojas, F., Ortiz, A, González, E. & Ulloa, R. (2011). *Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM)*. FONIDE 511091. Santiago: Mineduc.
- Solar, H., Rojas, F., y Ortiz, A. (2011). *Competencias matemáticas: Una línea de investigación*. Artículo presentado en XIII CIAEM - Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife (Brasil).